ĐỀ THI HSG LỚP 9 – QUẬN TÂN PHÚ - Vòng 2 (2015-2016)

Thời gian: 150 phút

Bài 1: Cho xyz =1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+xz}=1$

Bài 2: Giải phương trình:

a) $\left(x^2-9\right)\left(9x^2-1\right)=20x+1$

b) $\sqrt{\frac{2x}{1-x}}+4=9x$

Bài 3: Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện: $a+b\le 1$. Tìm GTNN của biểu thức: $P=a+b+\frac{1}{a}+\frac{9}{b}$

Bài 4: Cho ΔABC cân tại A nội tiếp (O). Vẽ 2 đường cao BD và CE của ΔABC. Vẽ Cx tiếp tuyến tại C của (O), vẽ AH vuông góc với Cx tại H. Chứng minh: D,E, H thẳng hàng.

Bài 5: Cho ΔABC có $ABC=30^0$. Về phía ngoài ΔABC dựng ΔACD đều. Chứng minh: $AB^2+BC^2=BD^2$.

Bài 6: Cho 2 hình chữ nhật có kích thước 1 × 15 và 2 × 20 như hình vẽ tạo thành 1 góc 30^0. Đặt hai cây thước lên mặt bàn. Tính diện tích phần mặt bàn bị che khuất.

HẾT

Hướng Dẫn Giải:
ĐỀ THI HSG LỚP 9 –
QUẬN TÂN PHÚ vòng 2 (2015-2016)

Bài 1: Cho xyz =1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+xz}=1$

Do xyz =1 nên ta có :

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+xz}=\frac{yz}{yz+xyz+y(xyz)}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{y}{y+zy+xyz}$$

$$=\frac{yz}{yz+1+y}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{y}{y+zy+1}$$

$$=1$$

Bài 2: Giải phương trình:

a) $\left(x^2-9\right)\left(9x^2-1\right)=20x+1$

$$\Leftrightarrow(x-3)(x+3)(3x+1)(3x-1)=20x+1 \Leftrightarrow\left(3x^2+10x+3\right)\left(3x^2-10x+3\right)=20x+1$$

$$\Leftrightarrow\left(3x^2+3\right)^2-100x^2=20x+1 \Leftrightarrow\left(3x^2+3\right)^2-(10x+1)^2=0\Leftrightarrow\left(3x^2+10x+4\right)\left(3x^2-10x+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\left(x+\frac{5}{3}\right)^2-\frac{13}{9}\right]\left[\left(x-\frac{5}{3}\right)^2-\frac{19}{9}\right]=0 \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{5}{3}\pm\frac{\sqrt{13}}{3}\\ x=\frac{5}{3}\pm\frac{\sqrt{19}}{3}\end{array}\right.$$

Vaäy $S=\left\{-\frac{5}{3}\pm\frac{\sqrt{13}}{3};\frac{5}{3}\pm\frac{\sqrt{19}}{3}\right\}$

b) $\sqrt{\frac{2x}{1-x}}+4=9x$

$$\sqrt{\frac{2x}{1-x}}+4=9x\Leftrightarrow\sqrt{\frac{2x}{1-x}}=9x-4\Leftrightarrow\begin{cases}9x-4\ge 0\\ \frac{2x}{1-x}=(9x-4)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{4}{9}\\ 2x=\left(81x^2-72x+16\right)(1-x)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{4}{9} \\ \left(81x^2 - 72x + 16\right)\left(1 - x\right) = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{4}{9} \\ \left(9x - 8\right)\left(9x^2 - 9x + 2\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{4}{9} \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{8}{9} \\ x = \dfrac{1}{3} \\ x = \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{8}{9} \\ x = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Vậy $S = \left\{\dfrac{8}{9}; \dfrac{2}{3}\right\}$

Bài 3: Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện: $a + b \le 1$. Tìm GTNN của biểu thức: $P = a + b + \dfrac{1}{a} + \dfrac{9}{b}$

Ta có:

$$\frac{1}{a} + \frac{9}{b} \ge \frac{16}{a+b} \Leftrightarrow \frac{b(a+b) + 9a(a+b)}{ab(a+b)} \ge \frac{16ab}{ab(a+b)} \Leftrightarrow ab + b^2 + 9a^2 + 9ab \ge 16ab \Leftrightarrow (b - 3a)^2 \ge 0 \text{ (bđt đúng)}$$

Do đó: $\dfrac{1}{a} + \dfrac{9}{b} \ge \dfrac{16}{a+b} \Leftrightarrow a + b + \dfrac{1}{a} + \dfrac{9}{b} \ge (a+b) + \dfrac{16}{a+b} \Leftrightarrow P \ge 16(a+b) + \dfrac{16}{a+b} - 15(a+b)$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

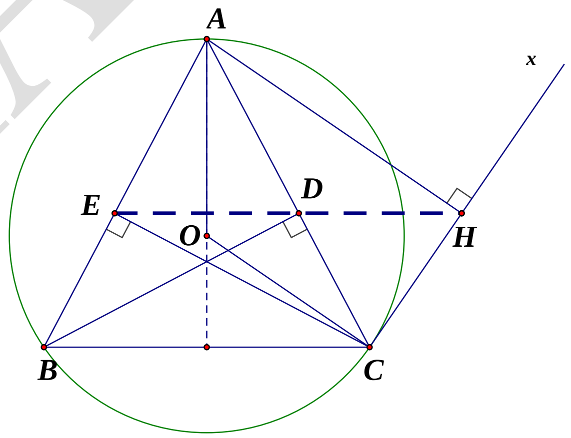
$$16(a+b) + \frac{16}{a+b} \ge 2\sqrt{16(a+b)\cdot\frac{16}{a+b}} \Leftrightarrow 6(a+b) + \frac{16}{a+b} \ge 32 \quad (1)$$

Ta có: $a + b \le 1 \Leftrightarrow -15(a+b) \ge -15 \quad (2)$

Từ (1) và (2), cộng vế theo vế, ta có: $P \ge 17$.

Vậy $P_{min} = 17$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = \dfrac{1}{2}$

Bài 4: Cho ΔABC cân tại A nội tiếp (O). Vẽ 2 đường cao BD và CE của ΔABC. Vẽ Cx tiếp tuyến tại C của (O), vẽ AH vuông góc với Cx tại H. Chứng minh: D, E, H thẳng hàng.



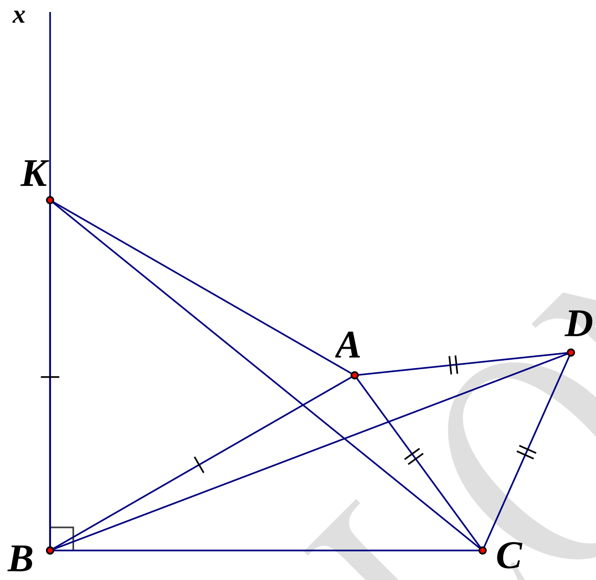
Ta có: $\begin{cases} AEH = ACH \text{ (tứ giác AECH nội tiếp)} \\ ACH = ABC \text{ (góc tại bởi tiếp tuyến và dây cung bằng góc nội tiếp khi cùng chắn AC)} \end{cases}$

$\Rightarrow AEH = ABC$ mà $ABC = ACB$ (ΔABC cân tai A) nên $AEH = ACB$

Mặt khác: $AED = ACB$ (tứ giác BEDC nội tiếp)

Nên $AEH = AED \Rightarrow$ tia EH trùng tia ED $\Rightarrow$ D, E, H thẳng hàng.

<u>Bài 5:</u> Cho ΔABC có $ABC = 30^0$. Về phía ngoài ΔABC dựng ΔACD đều. Chứng minh: $AB^2 + BC^2 = BD^2$.



Trên nửa mặt phẳng bờ BC, về phía có chứa điểm A, vẽ tia Bx $\perp$ BC tại B. Trên tia Bx lấy điểm K sao cho BK = BA.

Ta có: $ABC + ABK = CBK \Rightarrow 30^0 + ABK = 90^0 \Rightarrow ABK = 60^0$

Mà ΔBAK cân tại B (do BK = BA) nên ΔBAK đều $\Rightarrow BAK = 60^0$.

Ta có: $\begin{cases} BAD = BAC + CAD \\ KAC = BAC + BAD \\ CAD = BAD\left(=60^0\right) \end{cases} \Rightarrow BAD = KAC$

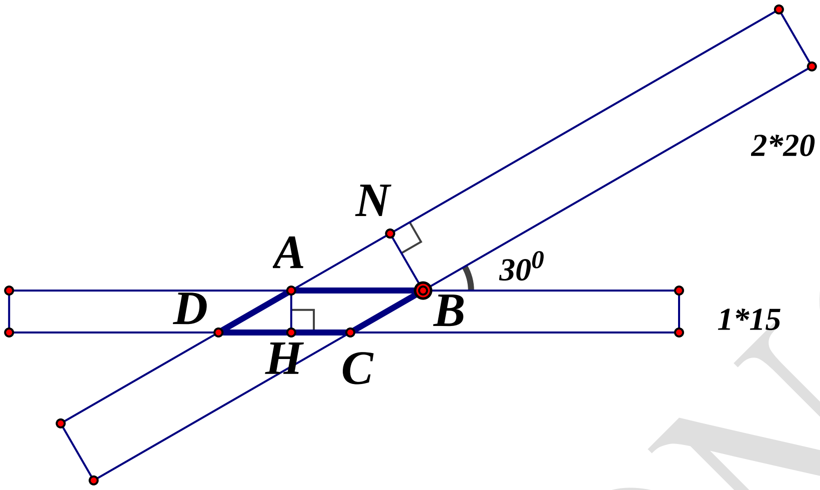
Xét ΔACK và ΔADB, ta có: $\begin{cases} AC = AD(...) \\ AK = AB(...) \\ KAC = BAD(cmt) \end{cases} \Rightarrow \Delta ACK = \Delta ADB(c-g-c) \Rightarrow CK = BD$.

Xét ΔBKC vuông tại B, ta có: $BK^2 + BC^2 = CK^2$ (định lí Pitago)

Mà $BK = AB$ (cách vẽ) và CK = BD (cmt)

Nên $AB^2 + BC^2 = BD^2$.

Bài 6: Cho 2 hình chữ nhật có kích thước 1 × 15 và 2 × 20 như hình vẽ tạo thành 1 góc 30^0. Đặt hai cây thước lên mặt bàn. Tính diện tích phần mặt bàn bị che khuất.



Gọi A, B, C, D như hình vẽ. Vẽ $BN \perp AD$ tại N.

Xét ΔNAB vuông tại N, ta có: $\sin NAB = \dfrac{BN}{AB} \Rightarrow \sin 30^0 = \dfrac{2}{AB} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{AB} \Rightarrow AB = 4$

Vẽ $AH \perp DC$ tại H $\Rightarrow AH = 1$

Do ABCD là hình bình hành nên $S_{ABCD} = AH.AB = 1.4 = 4$ (đvdt)

Vậy diện tích cần tìm là: $1*15 + 2*20 - 4 = 51\left(cm^2\right)$

HẾT